Njutnov zakon gravitacije

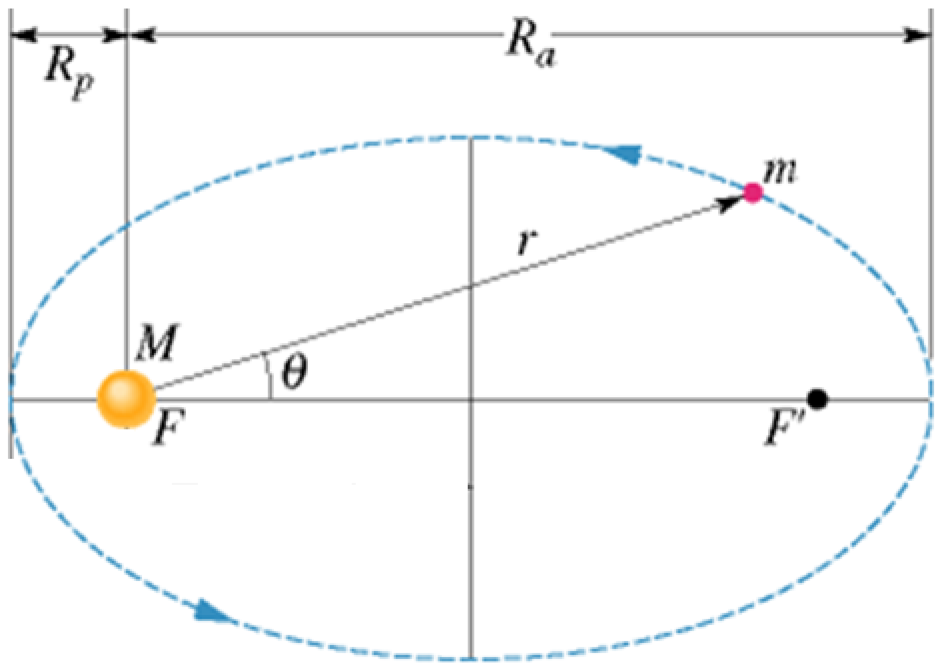
dr Mira Vučeljić

Keplerovi zakoni

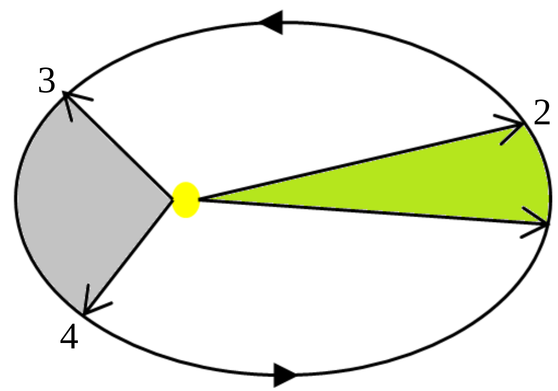
I – Putanja svake planete je elipsa sa Suncem u jednoj od njenih žiža.

II – Radijus vektor planete za isto vrijeme opiše jednake površine.

III – Kvadrat perioda obrtanja planete oko Sunca proporcionalan je trećem stepenu njenog rastojanja od Sunca. $T^2 = k \cdot r^3$



Slika 1.



Slika 2.

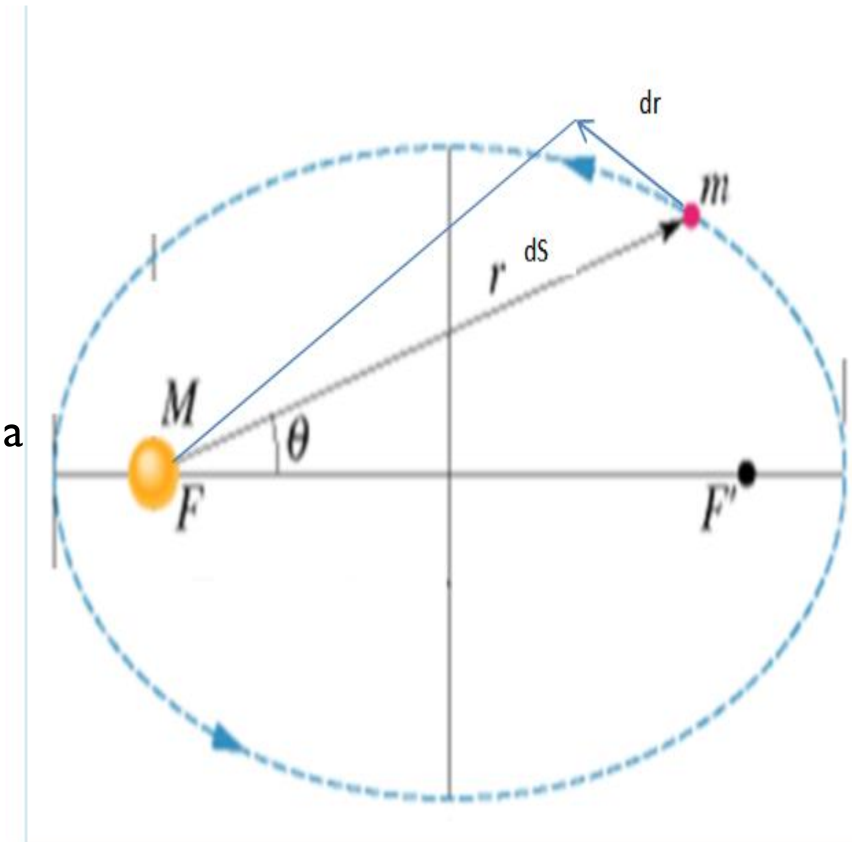
I Keplerov zakon Sila između Sunca i planete je privlačna.

II Keplerov zakon Sila je centralna, ima pravac radijus vektora položaja planete

$$\frac{dS}{dt} = const \qquad dS = \frac{1}{2}\left|\vec{r} \times d\vec{r}\right|$$

$$\frac{dS}{dt} = \frac{1}{2}\left|\vec{r} \times \frac{d\vec{r}}{dt}\right| = \frac{1}{2}\left|\vec{r} \times \vec{v}\right|$$

$$\frac{dS}{dt} = \frac{1}{2m}\left|\vec{r} \times m\vec{v}\right| = \frac{\vec{L}}{2m} = const$$



Iz zakona o odrzanju momenta kolicine kretanja dobijamo

$$\vec{L} = const \Rightarrow \overrightarrow{M} = o$$

Vektori r i F su paralelni, slijedi sila je centralna

III Keplerov zakon → Izraz za gravitacionu silu. Izvođenje je urađeno za jednostavniji slučaj kada je putanja kružna.

$$T = \frac{2r\pi}{v} \qquad T^2 = \frac{4r^2\pi}{v^2} \qquad v^2 = \frac{4r^2\pi}{T^2}$$

$$a = \frac{v^2}{r} = \frac{4r^2\pi}{T^2 r} = \frac{4r^2\pi}{kr^4} \sim \frac{1}{r^2}$$

$F = \frac{bm}{r^2}$ → sila kojom Sunce privlači Zemlju

$F' = \frac{cM}{r^2}$ → sila kojom Zemlja privlači Sunce

$$bm = cM \qquad \frac{b}{M} = \frac{c}{m} = \gamma \qquad b = \gamma \cdot M$$

$$\boxed{F = \gamma\frac{Mm}{r^2}} \quad \text{F1}$$

Da li je sila kojom Zemlja privlači jabuku iste prirode kao i sila kojom Zemlja privlači Mjesec?

$$mg = \frac{\gamma M_z m}{r_z^2}$$ → Sila kojom Zemlja privlači jabuku

$$g = \frac{\gamma M_z}{r_z^2} \qquad \text{(F2)}$$

$$M_m a_m = \frac{\gamma M_m M_z}{r_{mz}^2}$$ → Sila kojom Zemlja djeluje na Mjesec

$$\frac{a_m}{g} = \frac{\frac{1}{r_{mz}^2}}{\frac{1}{r_z^2}} = \frac{r_z^2}{r_{mz}^2} \qquad a_m = g\frac{r_z^2}{r_{mz}^2} = 9.81 \cdot \left(\frac{6377}{384100}\right)^2 = 2{,}72 \cdot 10^{-3}\,\frac{m}{s^2}$$

Iz astronomskih podataka dobijamo:

$$v_m = \frac{2\pi r_{mz}}{T_m} = \frac{2\pi \cdot 384100\ km}{27{,}3\ dana}$$

$$a_m = \frac{v_m^2}{r_{mz}} = 2{,}76 \cdot 10^{-3}\,\frac{m}{s^2}$$

- Dobijene vrijednosti ubrzanja Mjeseca se praktično poklapaju.
- Sila koja djeluje između bilo koja dva tijela mase m ima isti oblik kao i sila koja djeluje među planetama.

$$\boxed{F = \gamma \frac{m_1 m_2}{r^2}}$$ → **Univerzalni zakon gravitacije**

γ → Konstanta gravitacije (eksperimentalno odredio Kevendiš)

$$\gamma = 6{,}67 \cdot 10^{-11} \frac{Nm^2}{kg^2}$$

$$g = \frac{\gamma m_z}{r_z^2}$$

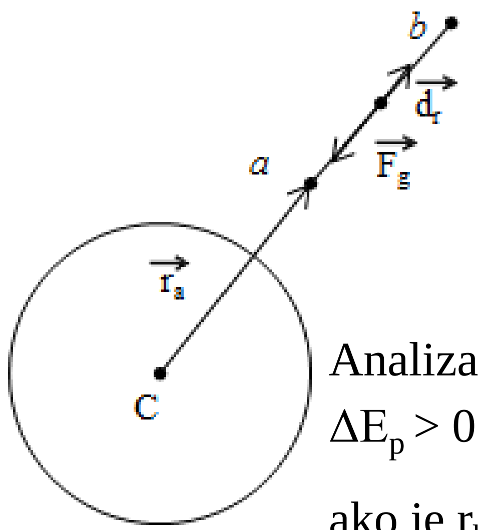
$$m_z = \frac{g r_z^2}{\gamma} = 5{,}98 \cdot 10^{24}\ \mathrm{kg}$$

$$\rho_z = 5{,}5 \cdot 10^3 \frac{kg}{m^3}$$

Potencijalna energija u gravitacionom polju. Kosmičke brzine.

POTENCIJALNA ENERGIJA U GRAVITACIONOM POLJU

Nađimo rad gravitacione sile pri pomjeranju tijela mase m iz tačke *a* u tačku *b* u gravitacionom polju.



$$A = \int_a^b \vec{F} \cdot \vec{dr} = - \int_a^b F \cdot dr = - \int_{r_a}^{r_b} \gamma \frac{m m_z}{r^2} \mathrm{dr}$$

$$A = \gamma m m_z \frac{1}{r} \Big|_{r_a}^{r_b} = \gamma m m_z \left(\frac{1}{r_b} - \frac{1}{r_a}\right)$$

Analiza: ako je $r_b > r_a$ tijelo se udaljava ➡ $A < 0$, $\Delta E_k < 0$, onda je $\Delta E_p > 0$

ako je $r_b < r_a$ tijelo se približava ➡ $A > 0$, $\Delta E_k > 0$, onda je $\Delta E_p < 0$

Zaključujemo: $\Delta E_p = - A = \gamma m m_z \left(\frac{1}{r_a} - \frac{1}{r_b}\right)$

Ako izaberemo referentni nivo u beskonačno dalekoj tački, ($r_b \to \infty$, $E_p(\infty) = 0$, $r_a \to r$)

$$\Delta E_p = E_p(\infty) - E_p(r) = \gamma m m_z \cdot \frac{1}{r}$$

$$E_p(r) = - \gamma m m_z \cdot \frac{1}{r} \quad \text{(F1)}$$

Izraz F1 se razlikuje od izraza dobijenog u poglavlju potencijalna energija gravitacionog polja E_p = mgh. Pokazaćemo da se izraz F1 može svesti na oblik mgh ukoliko je visina na kojoj se nalazi tijelo znatno manja od poluprečnika Zemlje.

Potencijalna energija tijela na visini h iznad površine Zemlje:

$$E_p = -\gamma\frac{mm_z}{R_z+h} = -\gamma\frac{mm_z}{R_z(1+\frac{h}{R_z})} = -\gamma\frac{mm_z}{R_z}\left(1+\frac{h}{R_z}\right)^{-1}$$

$$\left(1+\frac{h}{R_z}\right)^{-1} = \left(1-\frac{h}{R_z}\right) \text{ ako je } \frac{h}{R_z} << 1$$

$$E_p = -\gamma\frac{mm_z}{R_z}\left(1-\frac{h}{R_z}\right) = -\gamma\frac{mm_z R_z}{R_z^2} + \gamma\frac{mm_z h}{R_z^2} = -mgR_z + mgh$$

$$\boxed{g_o = \gamma\frac{m_z}{R_z^2}}$$

$$\Delta E_p = E_p(h_2) - E_p(h_1) = mg(h_2 - h_1)$$

g_o – ubrzanje zemljine teže na površini Zemlje $\boxed{g_o = \gamma \frac{m_Z}{R_Z^2}}$

g – ubrzanje zemljine teže na visini h $\boxed{g = \gamma \frac{m_Z}{(R_Z+h)^2}}$ $g = \gamma \frac{m_Z}{R_Z^2(1+\frac{h}{R_Z})^2}$

Ako je $\frac{h}{R_Z} << 1$, $g = g_o$, za visine h reda veličine R_z ubrzanje opada sa visinom (pogledati tabelu)

Altitude (km)	a_g (m/s^2)	Altitude Example
0	9.83	Mean Earth surface
8.8	9.80	Mt. Everest
36.6	9.71	Highest manned balloon
400	8.70	Space shuttle orbit
35 700	0.225	Communications satellite

KOSMIČKE BRZINE

I kosmička brzina

$$mv_1^2/R_z = \gamma \frac{mm_z}{R_z^2}$$

$$v_1 = \sqrt{gR_z} = 7{,}9\ \frac{km}{s}$$

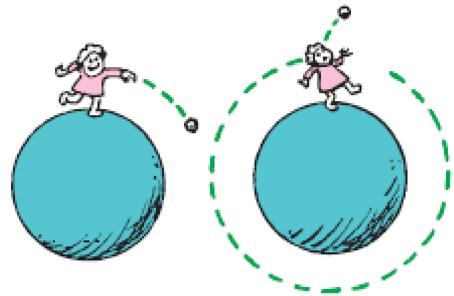
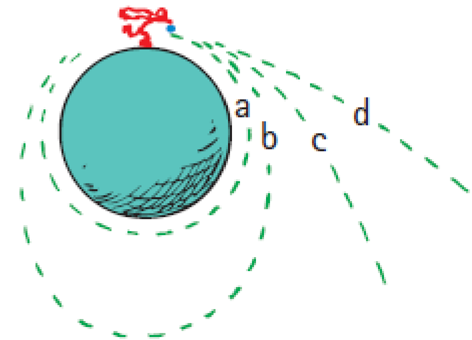


FIGURE 10.17
If the speed of the stone is great enough, the stone may become a satellite.



II kosmička brzina

$$E_k + E_p = \frac{mv^2}{2} - \gamma\frac{mm_z}{R_z} < 0$$ → tijelo ne napušta Zemljino gravitaciono polje

$$E_k + E_p = \frac{mv_2^2}{2} - \gamma\frac{mm_z}{R_z} = 0$$ → minimalan uslov za napuštanje gravitacionog polja

$$\frac{mv_2^2}{2} = \gamma\frac{mm_z}{R_z}$$

$$v_2 = \sqrt{2gR_z} = 11{,}1\ \frac{km}{s}$$